

الإختبار الأول في مادة التحليل

التمرين الأول: 04 نقاط

ليكن α و β عددين حقيقيين يحققان $0 < \alpha \leq \beta$ أثبت أن:

$$\frac{1}{8} \frac{(\beta - \alpha)^2}{\beta} \leq \frac{\alpha + \beta}{2} - \sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{1}{8} \frac{(\beta - \alpha)^2}{\alpha}$$

التمرين الثاني: 08 نقاط

لتكن المجموعة A المعرفة كالتالي: $A = \left\{ 5 - \frac{1}{2n-1} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

1. بين أنه $4 \leq 5 - \frac{1}{2n-1} < 5$ ، $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ، ثم أمنتج محدودية A .

2. بين أن المتتالية $(U_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بالشكل $U_n = 5 - \frac{1}{2n-1}$ متزايدة تمامًا، ماذا تستنتج، أحسب نهايتها.

3. عين $\inf(A)$ ، هل $\min(A)$ موجود (علل)؟

4. عين $\sup(A)$ ، هل $\max(A)$ موجود (علل)؟

5. باستعمال الخاصية المميزة لـ $\sup$ (أصغر الحواد العليا). بين أن $\sup(A) = 5$.

6. بين باستعمال التعريف أن: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n-6}{2n-1} = 5$.

التمرين الثالث: 08 نقاط

ليكن p و q من $\mathbb{N}^*$ ، نعرف المقدار $A(p, q) = \frac{2p^2-3q}{p^2+q}$ ، نضع المجموعة: $B = \{A(p, q) : 0 < p < q\}$.

1. أثبت أن 2 حاد من الأعلى لـ B وأن -3 حاد من الأسفل لـ B .

2. أحسب $\sup(A)$ و $\inf(A)$ مع التعليل.

تصحيح الاختبار (1) في مادة التحليل

التاريخ: 2019 (14)

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, 0 < \alpha \leq \beta$$

1. إثبات أن: $\frac{1}{8} \frac{(\beta - \alpha)^2}{\beta} \leq \frac{\alpha + \beta}{2} - \sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{1}{8} \frac{(\beta - \alpha)^2}{\alpha}$

نما أن المقدار $\frac{(\beta - \alpha)^2}{8}$ موجود في الطرفين فارتكزنا على وجوده في الوسط.

$$\frac{\alpha + \beta}{2} - \sqrt{\alpha\beta} = \frac{\alpha + \beta - 2\sqrt{\alpha\beta}}{2} = \frac{(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})^2}{2}$$

$$= \left(\frac{(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})(\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha})}{\sqrt{2}(\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha})} \right)^2 = \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha})^2}$$

$$= \frac{(\beta - \alpha)^2}{8} \cdot \frac{4}{(\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha})^2}$$

بقي لنا أن نبرهن أن: $\frac{1}{\beta} \leq \frac{4}{(\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha})^2} \leq \frac{1}{\alpha}$ ؟

لدينا: $0 < \alpha \leq \beta$ } لدينا: $\alpha \leq \beta \Rightarrow \sqrt{\alpha} \leq \sqrt{\beta}$

$\alpha \leq \beta \Rightarrow \sqrt{\alpha} \leq \sqrt{\beta}$

$\Rightarrow \sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha} \leq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

$\Rightarrow 2\sqrt{\alpha} \leq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

$\Rightarrow \frac{4}{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2} \leq \frac{1}{\alpha} \dots (1)$

(1)

$\Rightarrow \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \leq 2\sqrt{\beta}$

$\Rightarrow (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 \leq 4\beta$

$\Rightarrow \frac{1}{\beta} \leq \frac{4}{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2} \dots (2)$

(2)

من (1) و (2) نجد:

$$\frac{1}{\beta} \leq \frac{4}{(\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha})^2} \leq \frac{1}{\alpha} \dots (*)$$

نجزى الطرف المتراجعة (*) في العدد الموجب $\frac{(\beta - \alpha)^2}{8}$ نجد

النتيجة المطلوب

CCIS

ص 1

$$A = \left\{ 5 - \frac{1}{2n-1}, n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad \text{الترتيب هو (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: 4 \leq 5 - \frac{1}{2n-1} < 5$$

$$n \geq 1 \Rightarrow 2n \geq 2$$

لدينا

$$\Rightarrow 2n-1 \geq 1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2n-1} \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq -\frac{1}{2n-1} < 0$$

$$\Rightarrow 5-1 \leq 5 - \frac{1}{2n-1} < 5$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*: 4 \leq 5 - \frac{1}{2n-1} < 5. \quad \text{ومن ثم:}$$

نستنتج أن A هي مجموعة محدودة (محدودة من الأعلى بـ العدد 5 ومن الأسفل بالعدد 4)

② إثبات أن المتتالية: $u_n = 5 - \frac{1}{2n-1}$ متزايدة تمامًا.

$$u_{n+1} - u_n = 5 - \frac{1}{2n+1} - \left(5 - \frac{1}{2n-1} \right) = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

$$= \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} > 0 \quad n \geq 1$$

ومن ثم $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

الاستنتاج: بما أن $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متزايدة تمامًا ومحدودة من الأعلى بـ

العدد 5 فهي متقاربة (نظرية حساب نهايتها) (نظرية)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \quad \Leftrightarrow (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ متقاربة بـ } l$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(5 - \frac{1}{2n-1} \right) = 5$$

$$CO15 \quad \boxed{l=5}$$

②

③ تعيين $\inf(A)$ هل $\min(A)$ موجود؟ التعليل:

لدينا: $\forall n \in \mathbb{N}^{\infty}: 4 \leq 5 - \frac{1}{2n-1} < 5$

4 حاد من الأسفل لـ A و $4 \in A$

$$\begin{cases} \forall n \in A: 4 \leq n \\ 4 \in A: (n=1 \text{ من أجل}) \end{cases}$$

015

ومن ثم $\min(A) = \inf(A) = 4$

④ تعيين $\sup(A)$ هل $\max(A)$ موجود على؟

لدينا: $\forall n \in \mathbb{N}^{\infty}: 4 \leq 5 - \frac{1}{2n-1} < 5$

5 حاد من الأعلى لـ A لكن $5 \notin A$ ومن ثم

$\sup(A) = 5$ و $\max(A)$ غير موجود.

- اثبات أن $\max(A)$ غير موجود

لنفرض بالتحقق - نفرض أن $\max(A)$ موجود وليكن m أي

$$\max(A) = m \Leftrightarrow \begin{cases} \text{شرط بحدودية} \quad \forall n \in A: n \leq m \\ \text{شرط الانتقاء} \quad m \in A \end{cases}$$

لدينا: $m \in A$ معناه: $\exists n \in \mathbb{N}^{\infty}: m = 5 - \frac{1}{2n-1}$

ليكن $n_1 = n+1$ وأضغ أن $n_1 \in \mathbb{N}^{\infty}$ وأن

$$n_1 > n \Rightarrow 2n_1 > 2n \Rightarrow 2n_1 - 1 > 2n - 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n_1-1} < \frac{1}{2n-1} \Rightarrow \frac{-1}{2n_1-1} < \frac{-1}{2n-1}$$

015

$$\Rightarrow \underbrace{5 - \frac{1}{2n_1-1}}_{m_1 \in A} < \underbrace{5 - \frac{1}{2n-1}}_m$$

تناقض كون m حاد من الأعلى لـ A و $m \in A$ على أن $\max(A) = m$
من الفرض ومن ثم: $\max(A)$ غير موجود.

5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n-6}{2n-1} = 5$: إثبات أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n-6}{2n-1} = 5$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A : 5 - \varepsilon < x_\varepsilon$$

$$x_\varepsilon \in A \Rightarrow \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* : x_\varepsilon = 5 - \frac{1}{2n_\varepsilon - 1}$$

$$\left(\begin{aligned} 5 - \varepsilon < 5 - \frac{1}{2n_\varepsilon - 1} &\Leftrightarrow \varepsilon > \frac{1}{2n_\varepsilon - 1} \\ \Leftrightarrow 2n_\varepsilon - 1 > \frac{1}{\varepsilon} &\Leftrightarrow 2n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon} + 1 \\ \Leftrightarrow n_\varepsilon > \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2} \end{aligned} \right) \text{ معادلة}$$

$$n_\varepsilon \in \mathbb{N}^* : \text{نأخذ : } n_\varepsilon = \left[\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2} \right] + 1$$

$$n_\varepsilon > \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2} \Rightarrow 2n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon} + 1$$

$$\Rightarrow 2n_\varepsilon - 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{2n_\varepsilon - 1} < \varepsilon \Rightarrow \frac{-1}{2n_\varepsilon - 1} > -\varepsilon$$

$$\text{C2} \Rightarrow 5 - \varepsilon < \underbrace{5 - \frac{1}{2n_\varepsilon - 1}}_{x_\varepsilon}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in A : 5 - \varepsilon < x_\varepsilon \quad \text{و من هنا :}$$

$$n_\varepsilon = \left[\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2} \right] + 1$$

$$\text{6) إثبات باستخدام التعريف أن : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10n-6}{2n-1} = 5$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^* : n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{10n-6}{2n-1} - 5 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{10n-6}{2n-1} - 5 \right| = \left| \frac{10n-6-10n+5}{2n-1} \right| = \left| \frac{-1}{2n-1} \right| = \frac{1}{2n-1}, n \geq 1$$

$$\left(\frac{1}{2n-1} < \varepsilon \Leftrightarrow 2n-1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow 2n > \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \text{ معادلة}$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2}$$

$$\text{C2} \quad n_0 = \left[\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2} \right] + 1 \quad \text{نأخذ :}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^* : n \geq n_0 \Rightarrow \left| \frac{10n-6}{2n-1} - 5 \right| < \varepsilon$$

$$p, q \in \mathbb{N}^{+}$$

$$A(p, q) = \frac{2p^2 - 3q}{p^2 + q}$$

$$A(p, q) = \frac{2p^2 - 3q}{p^2 + q}$$

$$B = \{A(p, q) : 0 < p < q\}$$

①: يثبت أن 2 حاد من الأعلى لم B و أن 3 حاد من الأسفل لم B .

$$p, q \in \mathbb{N}^{+}$$

$$2 - A(p, q) = 2 - \frac{2p^2 - 3q}{p^2 + q} = \frac{5q}{p^2 + q} > 0 \quad (C1)$$

$$3 + A(p, q) = 3 + \frac{2p^2 - 3q}{p^2 + q} = \frac{5p^2}{p^2 + q} > 0 \quad (C2)$$

ومن ثم: $-3 < x < 2$ $\forall x \in B$ وبالتالي فإن 2 حاد من الأعلى لم B و 3 حاد من الأسفل لم B .

$$\sup(B) = \alpha, \inf(B) = \beta$$

وبالتالي يكون لدينا اعتمادا على ما سبق: $\alpha \leq 2$ / $\beta \geq -3$

②: نفرض أن $\alpha \leq 2$ ، لنفرض أن $\alpha < 2$ عندئذ يوجد اعتمادا

على خاصية أرخيدست عدد n يحقق $n(2-n) > 5$

ولماتان $A(n, n+1) \leq \alpha$ استنتاجات:

$$(C1) \quad \alpha \geq A(n, n+1) = 2 - \frac{5(n+1)}{n^2 + n + 1} > 2 - \frac{5(n+1)}{n^2 + n} = 2 - \frac{5}{n} > 2 - (2 - \alpha) = \alpha$$

وهذا تناقض ومن ثم $\alpha = 2$ أي: $\sup(A) = \alpha$

- بنفس الطريقة نفرض أن $\beta \geq -3$ ، لنفرض أن $\beta > -3$ عندئذ

يوجد اعتمادا على خاصية أرخيدست عدد m يحقق:

$(m+1)(\beta+3) > 5$ ، ولما كان $A(m, m^3) \geq \beta$ استنتاجات:

$$(C2) \quad \beta \leq A(m, m^3) = -3 + \frac{5}{m+1}$$

$$< -3(\beta+3) = \beta$$

وهذا تناقض واضح ومن ثم $\beta = -3$ أي: $\inf(A) = -3$